



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

ÁNGULOS POLIEDROS-ANGULO
TRIEDRO

CICLO
PRE
2024-1



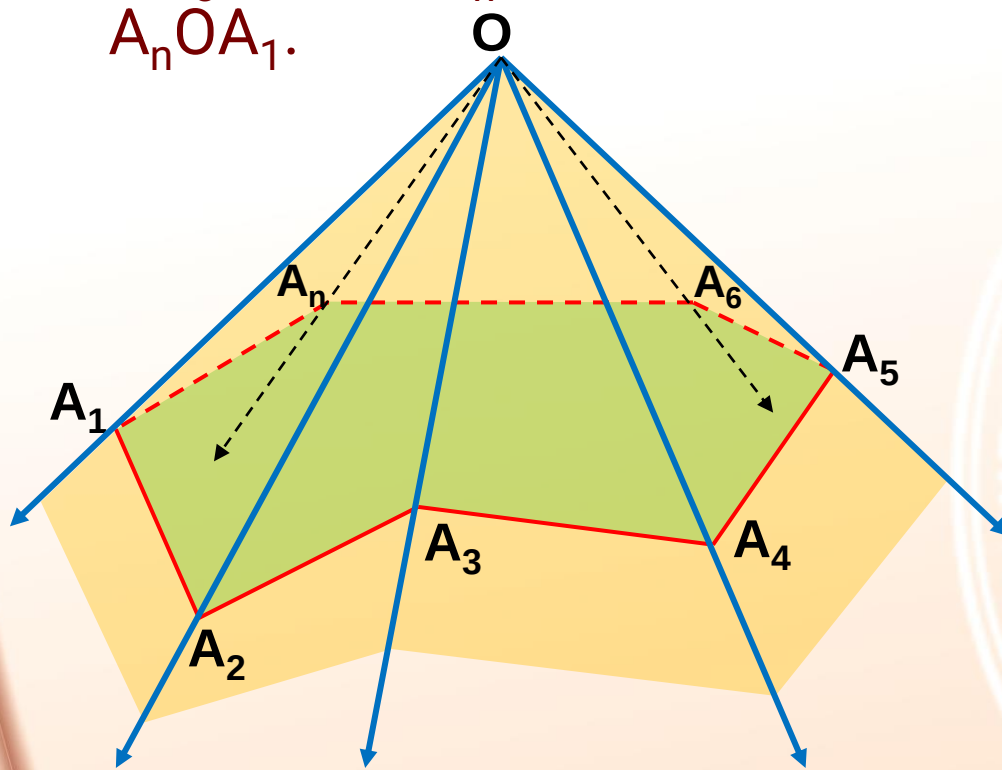
ÁNGULO POLIEDRO

DEFINICIÓN

Sea el polígono $A_1A_2A_3...A_n$ y el punto O no coplanar con el polígono. Se denomina ángulo poliedro $O-A_1A_2A_3...A_n$ a la unión de los rayos $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, ... y $\overrightarrow{OA_n}$ y los interiores de los ángulos A_1OA_2 , A_2OA_3 , A_3OA_4 , ... y A_nOA_1 .

Elementos:

- 1) Vértice: O
- 2) Arista: rayo $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, ... y $\overrightarrow{OA_n}$
- 3) Cara: la unión de dos aristas consecutivas y el interior del ángulo determinado por estas; caras A_1OA_2 , A_2OA_3 , A_3OA_4 , ... y A_nOA_1
- 4) Diedro: determinado por dos caras adyacentes



Notación: Ángulo poliedro $O-A_1A_2A_3...A_n$

Clasificación de los ángulos poliedros

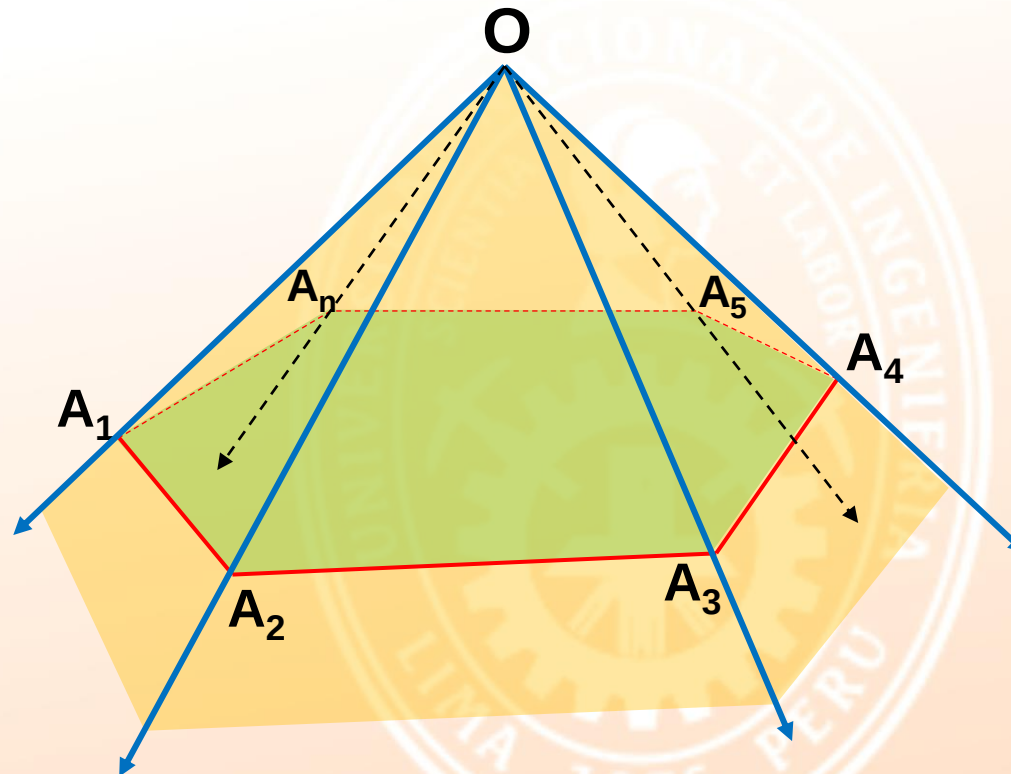
Los ángulos poliedros se clasifican según el número de caras:

Ángulo poliedro	Número de caras
Ángulo triedro	3
Ángulo tetraedro	4
Ángulo pentaedro	5
Ángulo hexaedro	6
Ángulo heptaedro	7
Ángulo octaedro	8
Ángulo nonaedro	9
Ángulo decaedro	10
Ángulo endecaedro	11
Ángulo dodecaedro	12
Ángulo pentadecaedro	15
Ángulo icosaedro	20

ÁNGULO POLIEDRO CONVEXO

DEFINICIÓN

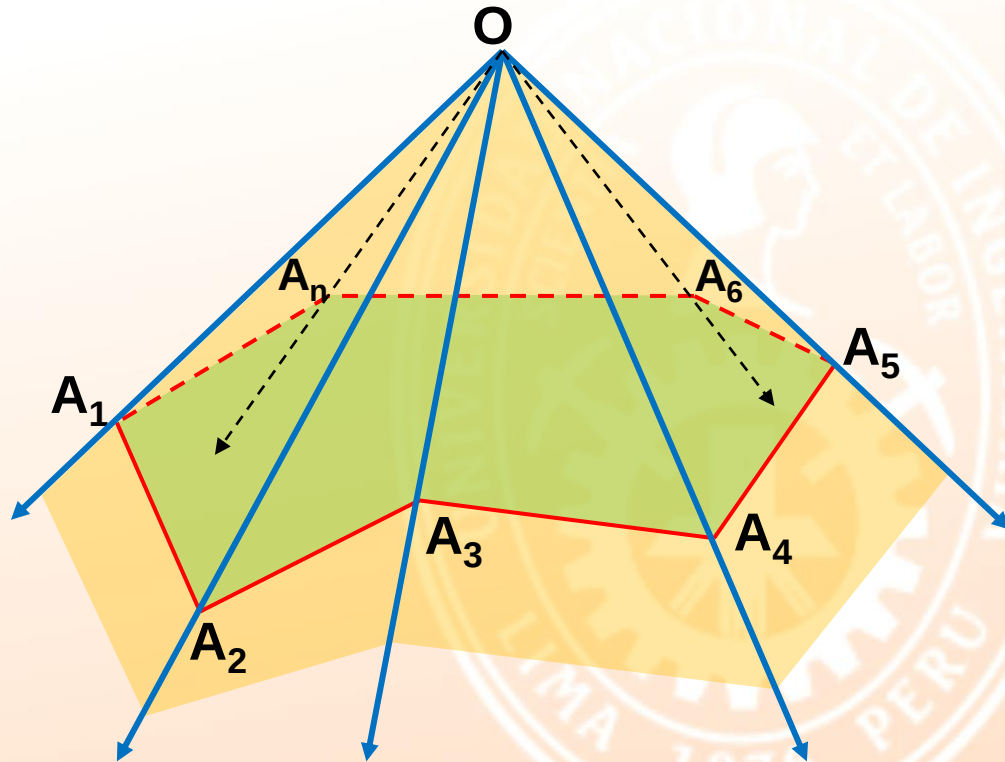
El ángulo poliedro $O-A_1A_2A_3\dots A_n$ se denomina convexo, cuando el polígono $A_1A_2A_3\dots A_n$ es convexo


ce
pre
UNI

ÁNGULO POLIEDRO NO CONVEXO

DEFINICIÓN

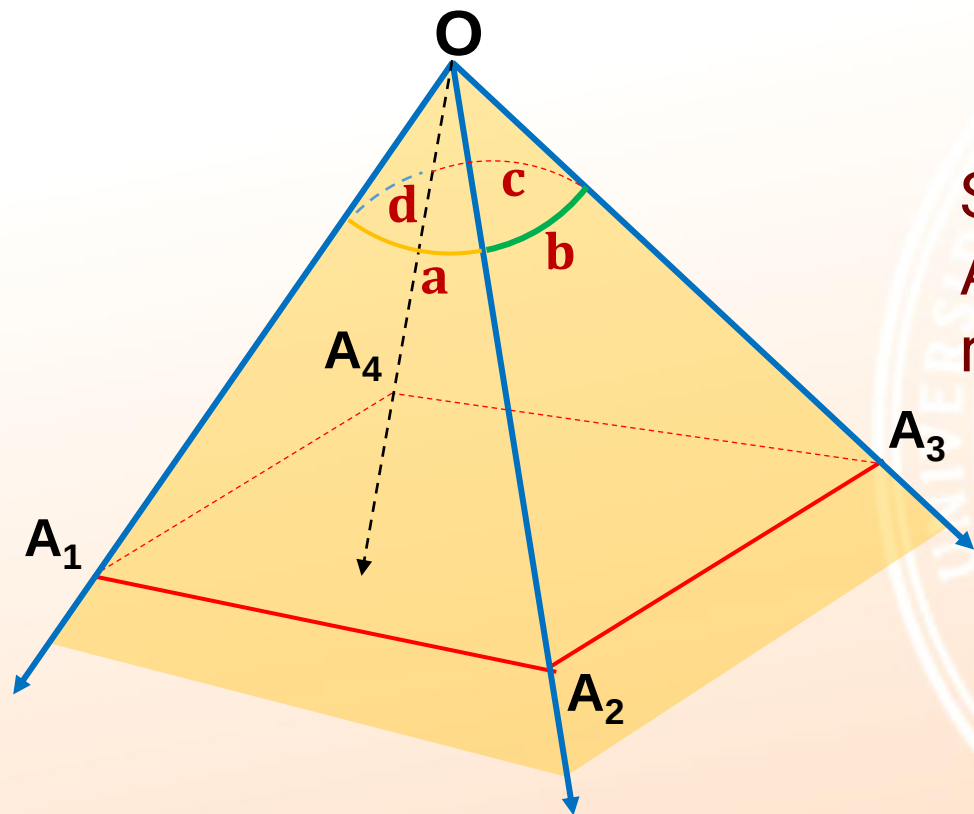
El ángulo poliedro $O-A_1A_2A_3\dots A_n$ se denomina no convexo, cuando el polígono $A_1A_2A_3\dots A_n$ es no convexo



TEOREMA

En un ángulo poliedro convexo, la suma de las medidas de todas las caras es mayor que 0 y menor que 360.

Ejemplo:



Si las medidas de las caras A_1OA_2 , A_2OA_3 , A_3OA_4 y A_4OA_1 son a , b , c y d , respectivamente, entonces

$$0 < a + b + c + d < 360$$

EJERCICIO 06

Las medidas de las caras de un ángulo pentaedro convexo, son números enteros y están en la relación de 1, 3, 4, 5, 7 respectivamente. Si la medida de la menor de las caras es mayor que 16, entonces la medida entera de la cara mayor es

A) 117

B) 118

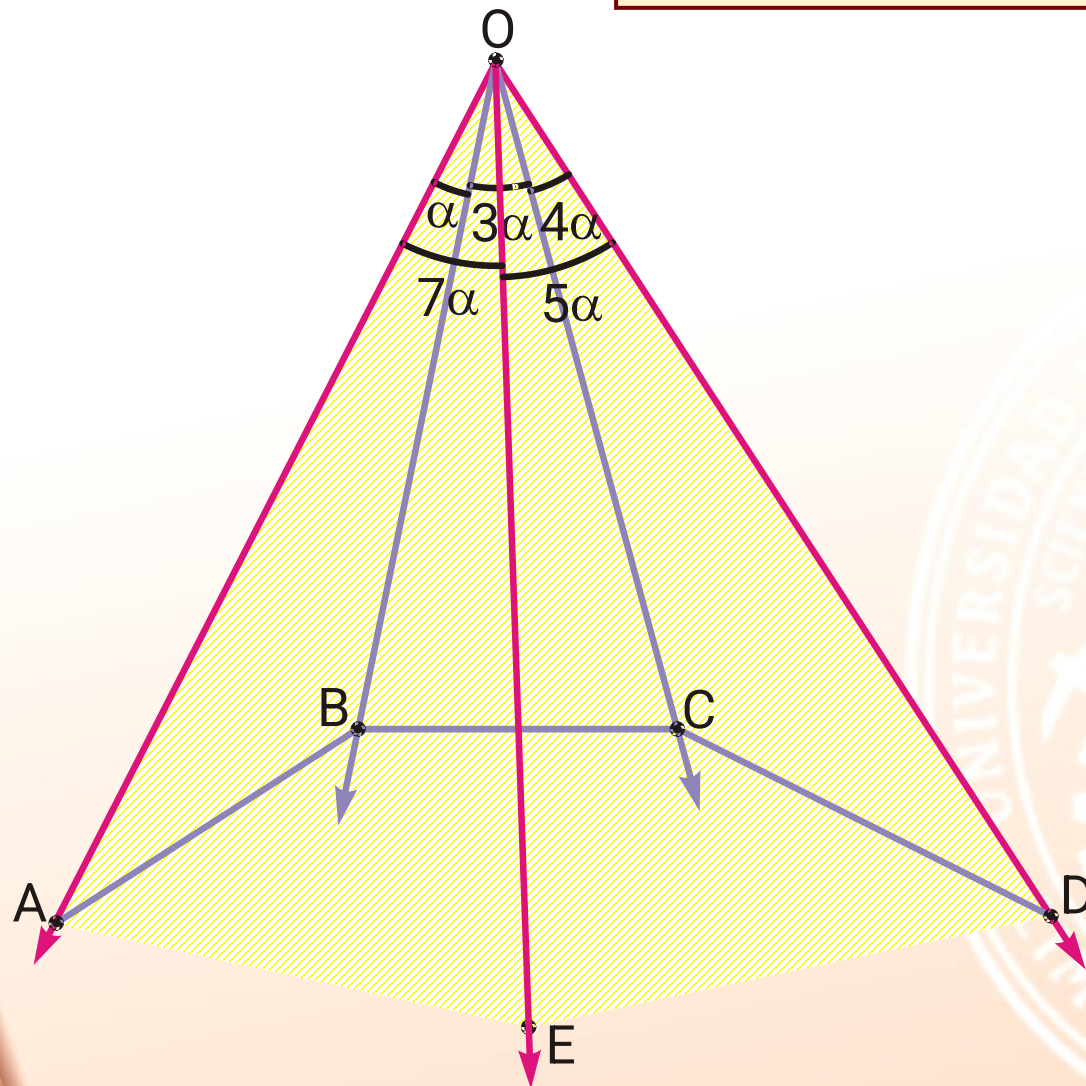
C) 119

D) 120

E) 121

RESOLUCIÓN 06

Las medidas de las caras de un ángulo pentaedro convexo, son números enteros y están en la relación de 1, 3, 4, 5, 7 respectivamente. Si la medida de la menor de las caras es mayor que 16, entonces la medida de la cara mayor es



$$7\alpha = ?$$

Por teorema de ángulos poliedros:

$$\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 7\alpha < 360$$

$$\Rightarrow \alpha < 18$$

Pero por dato: $\alpha > 16$

$$\Rightarrow \alpha = 17$$

Luego la mayor cara mide: $7\alpha = 7(17)$

$$\therefore 7\alpha = 119$$

Clave: C

EJERCICIO 07

Un plano interseca a las aristas de un ángulo tetraedro de vértice O, en los puntos A, B, C y D. Si las caras del ángulo tetraedro miden 60° , $OA = OC = 8$ u y $OB = OD = 5$ u, entonces la medida aproximada del ángulo BOD es

A) 30°

B) 37°

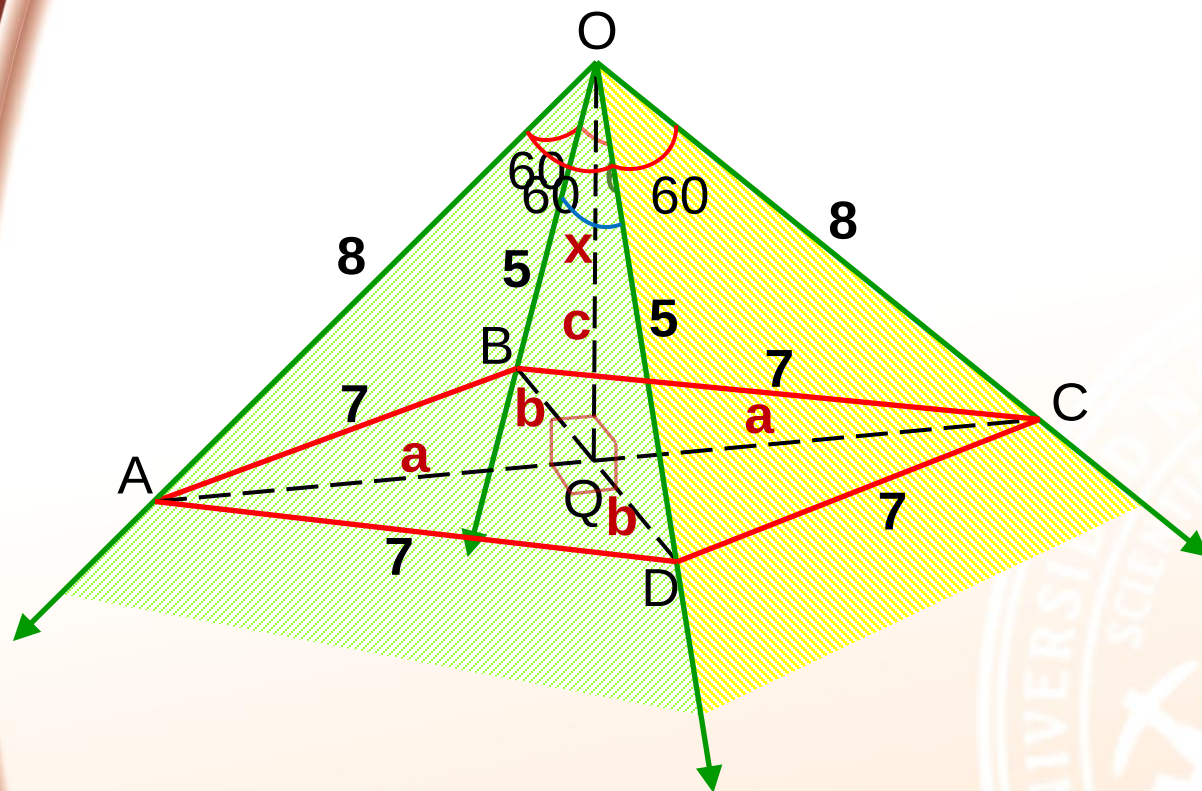
C) 45°

D) 53°

E) 60°

RESOLUCIÓN 07

Un plano interseca a las aristas de un ángulo tetraedro de vértice O, en los puntos A, B, C y D. Si las caras del ángulo tetraedro miden 60, $OA = OC = 8$ u y $OB = OD = 5$ u, entonces la medida aproximada del ángulo BOD es



Sea $m\angle BOD = x$

Teorema del coseno ($\triangle AOD$):

$$(AD)^2 = 8^2 + 6^2 - 2(6)(8)\cos 60$$

$$AD = 7$$

$$\triangle AOD \cong \triangle COD \cong \triangle COB \cong \triangle AOB \text{ (LAL)}$$

$$AD = CD = BC = AB = 7$$

ABCD es un rombo

$$\overline{AC} \perp \overline{BD}, \overline{OQ} \perp \overline{BD} \text{ y } \overline{OQ} \perp \overline{AC}$$

Teorema de Pitágoras

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 7^2 \\ a^2 + c^2 = 8^2 \\ b^2 + c^2 = 5^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 2\sqrt{11} \\ b = \sqrt{5} \\ c = 2\sqrt{5} \end{array}$$

$$\Rightarrow m\angle BOQ = m\angle DOQ = 53/2$$

$$\therefore m\angle BOD = x = 53$$

Clave: D



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

ÁNGULO TRIEDRO

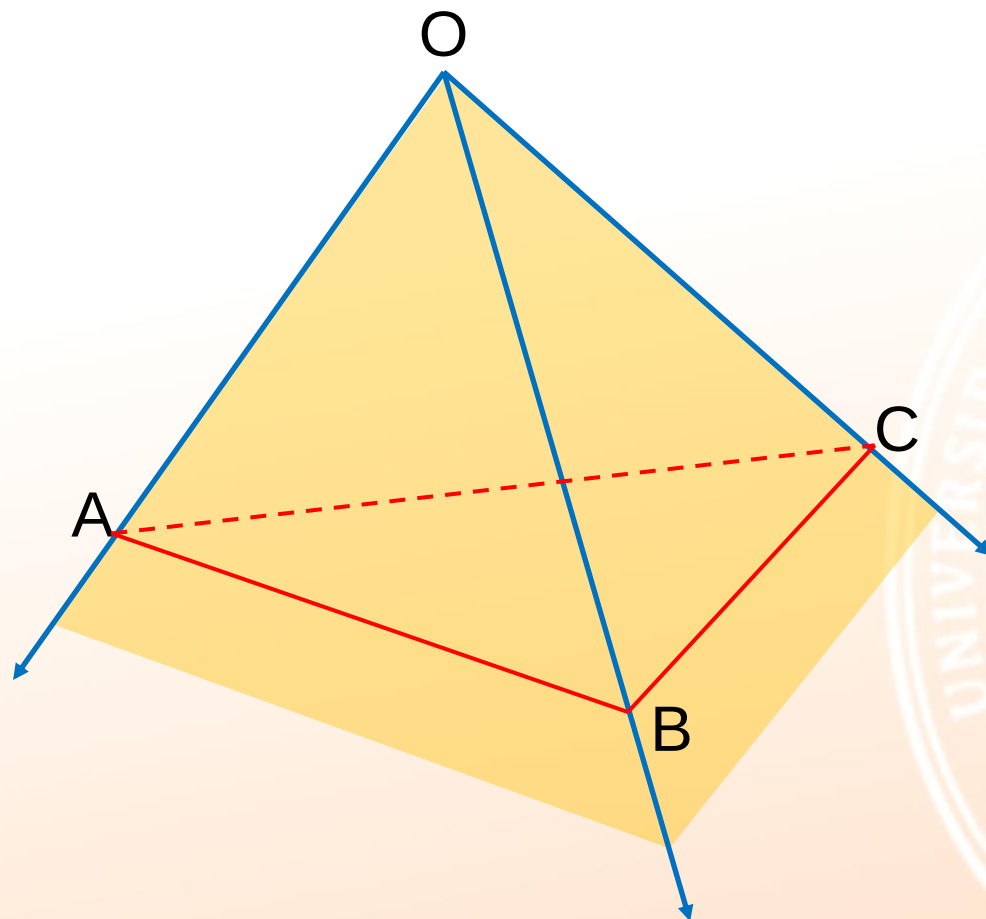
CICLO

2022-2



ÁNGULO TRIEDRO

Definición.- Es un ángulo poliedro que tiene tres caras



Elementos del ángulo triedro

1) Vértice: O

2) Caras: AOB, BOC y AOC

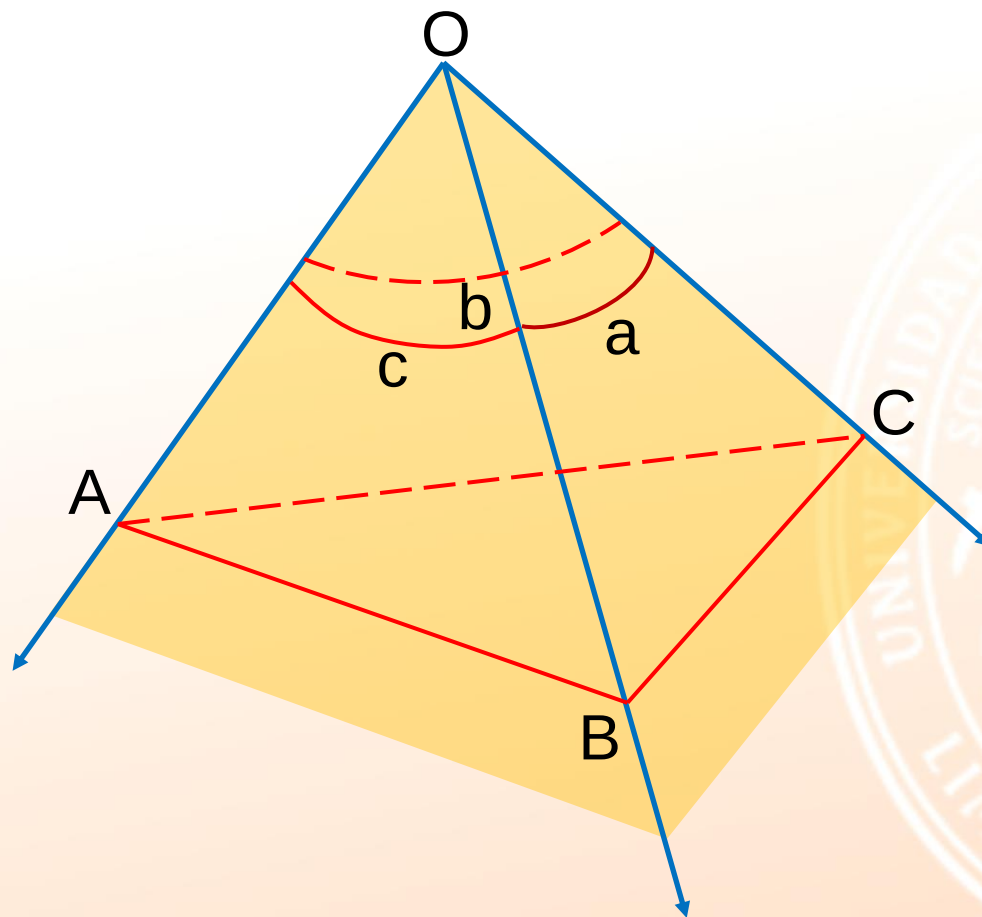
3) Diedros: son los ángulos diedros formados por dos caras adyacentes

Notación

Ángulo triedro O-ABC

TEOREMA

En todo ángulo triedro se cumple que la suma de las medidas de las tres caras es menor que 360 y mayor que 0.

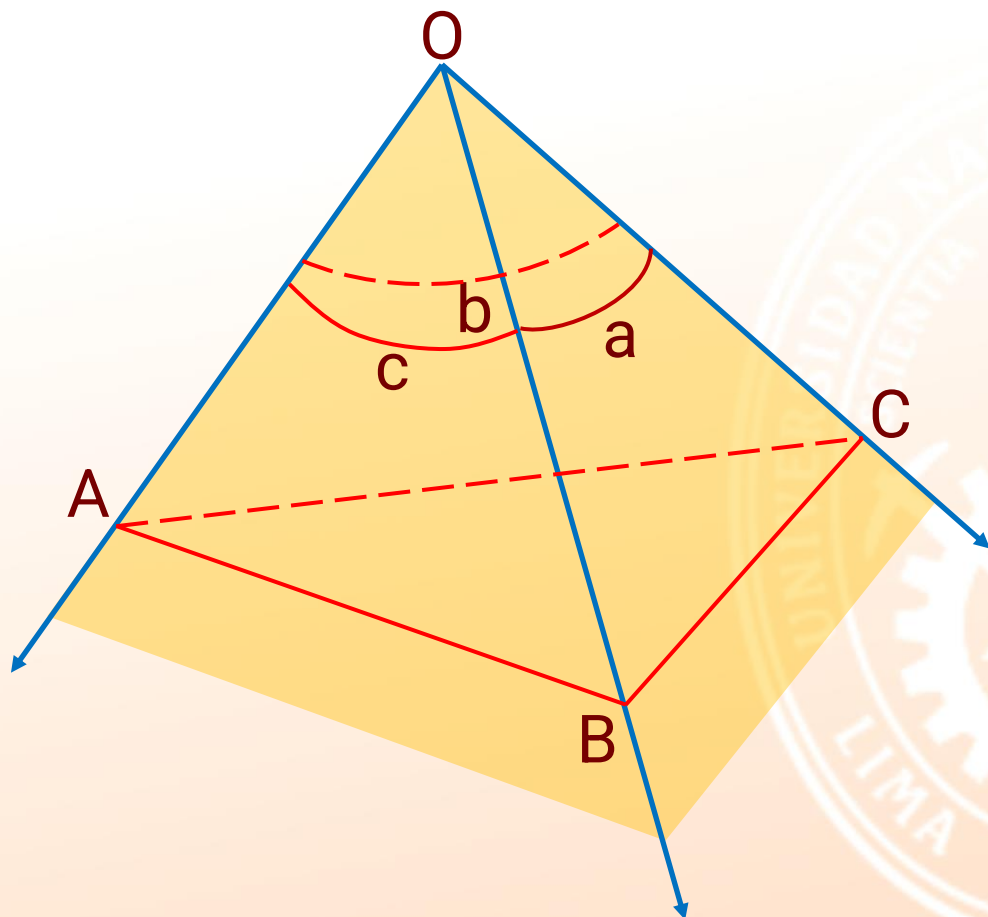


Si a , b y c son las medidas de las caras BOC, AOC y AOB, entonces

$$0 < a + b + c < 360$$

TEOREMA

En todo ángulo triedro se cumple que la medida de una de las caras es menor que la suma de las medidas de las otras dos.



$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

$$c < a + b$$

ce
pre
UNI

EJERCICIO 01

Dos caras de un ángulo triedro miden 96 y 132 respectivamente. Halle los valores enteros mínimo y máximo de la medida de la tercera cara.

A) 37 y 131

D) 37 y 142

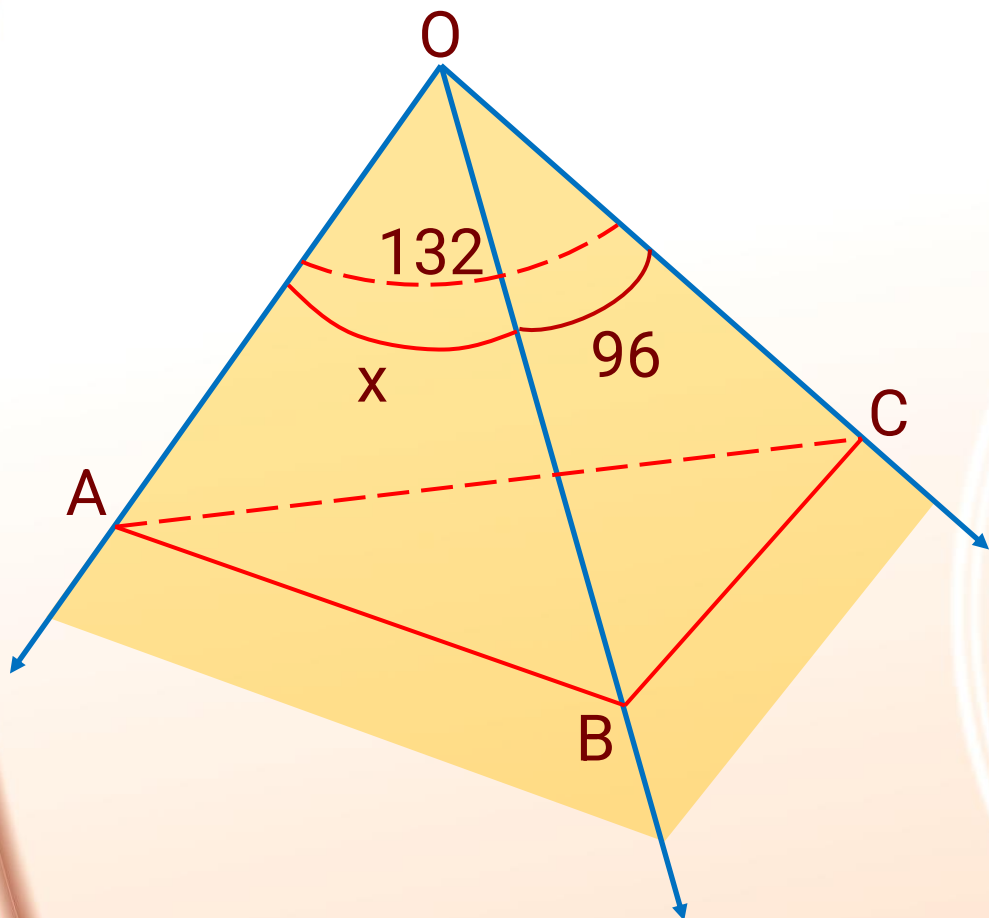
B) 38 y 142

E) 39 y 152

C) 39 y 151

RESOLUCIÓN 01

Dos caras de un ángulo triedro miden 96 y 132 respectivamente. Halle los valores enteros mínimo y máximo de la medida de la tercera cara.



Teorema:

$$96 + 132 + x < 360$$

$$\Rightarrow x < 132 \quad \dots (1)$$

Teorema:

$$x < 132 + 96 \Rightarrow x < 228$$

$$x > 132 - 96 \Rightarrow x > 36$$

$$\Rightarrow 36 < x < 228 \quad \dots (2)$$

de (1) y (2):

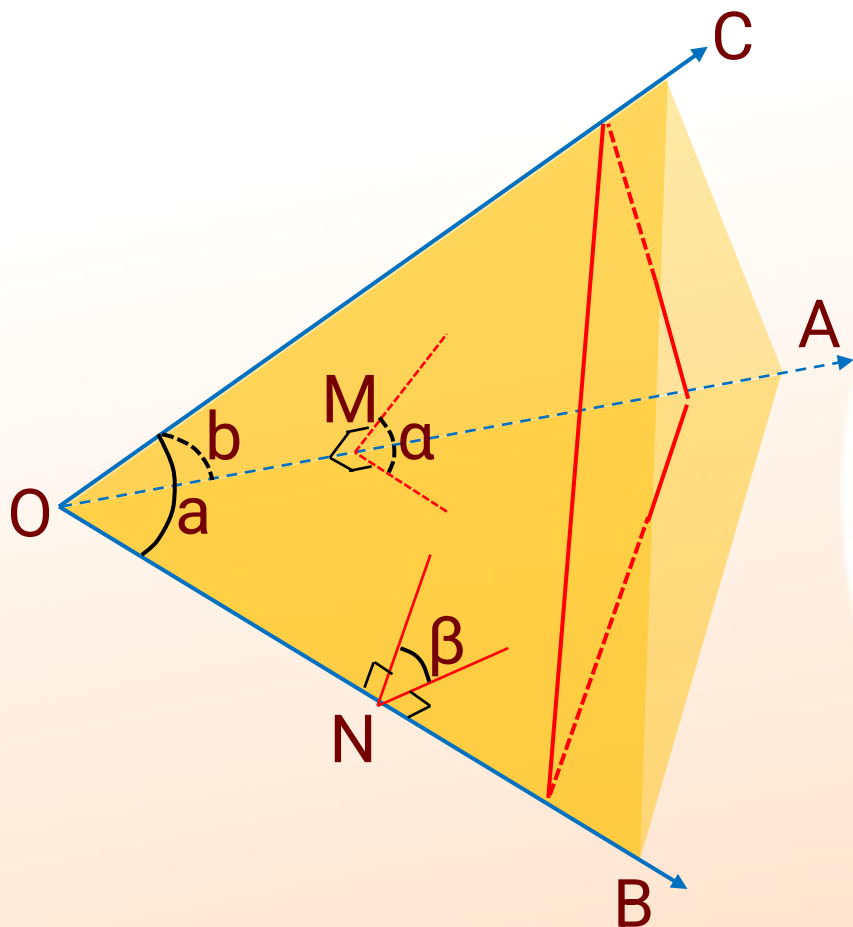
$$36 < x < 132$$

$$\therefore x_{\min} = 37 \text{ y } x_{\max} = 131$$

Clave: A

TEOREMA

Si dos caras de un ángulo triedro son congruentes, entonces los diedros opuestos a estas caras son congruentes.



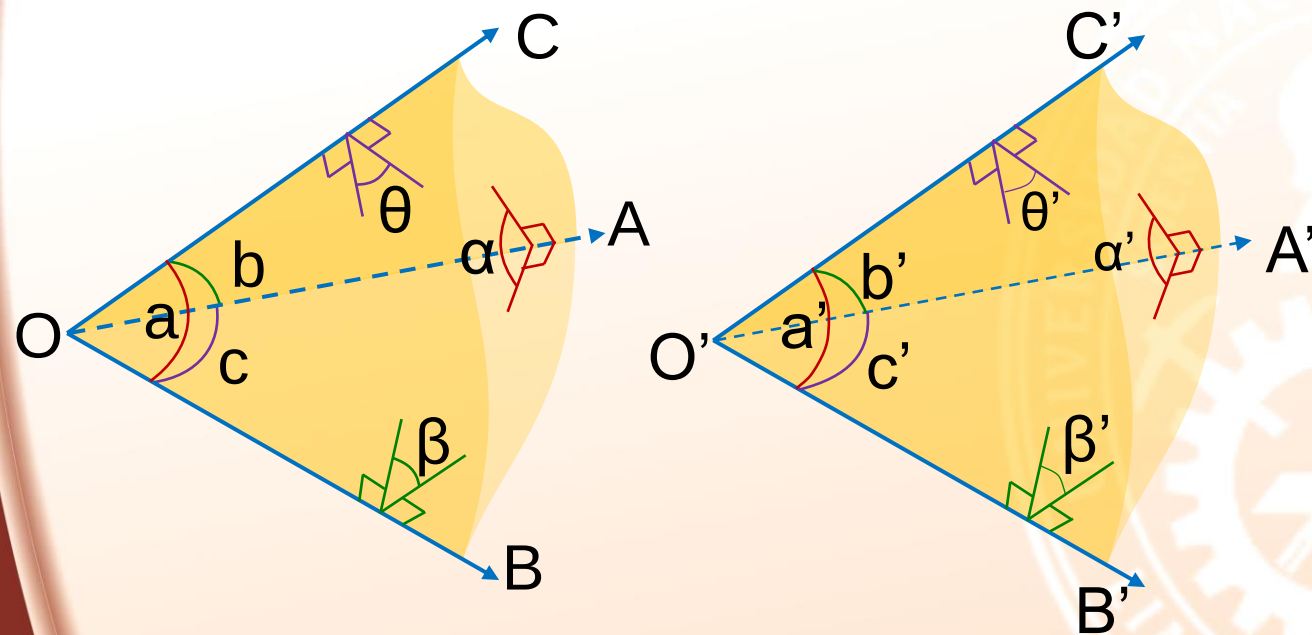
a y b son las medidas de las caras BOC y AOC; α y β son las medidas de los ángulos diedros opuestos a estas caras.

Si $a = b$,
entonces

$$\alpha = \beta$$

ÁNGULOS TRIEDROS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos triedros $O-ABC$ y $O'-A'B'C'$ se denominan suplementarios, si las caras AOB , BOC y AOC son los suplementos de los ángulos diedros de aristas $O'C'$, $O'A'$ y $O'B'$ respectivamente, también las caras $A'O'B'$, $B'O'C'$ y $A'O'C'$ son los suplementos de los diedros de aristas OC , OA y OB respectivamente.



Los ángulos triedros $O-ABC$ y $O'-A'B'C'$ son suplementarios si:

$$\begin{aligned} a + \alpha' &= 180 \\ b + \beta' &= 180 \\ c + \theta' &= 180 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a' + \alpha &= 180 \\ b' + \beta &= 180 \\ c' + \theta &= 180 \end{aligned}$$

EJERCICIO 02

Si los diedros de un ángulo triedro miden 127, 127 y 90, entonces la medida de una de las caras congruentes es

A) $\text{Arc cos } (-2/5)$

B) $\text{arc cos}(-1/3)$

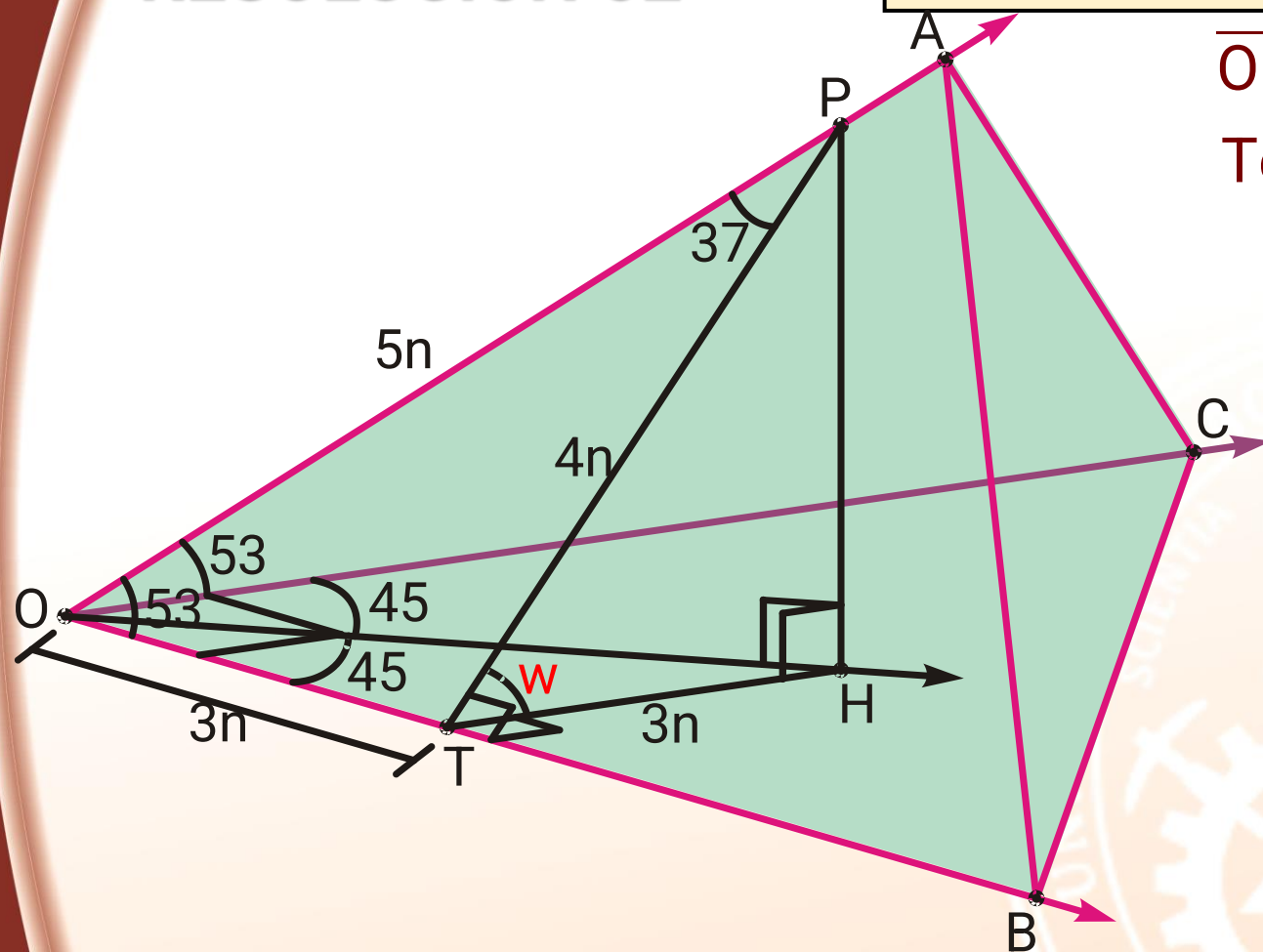
C) $\text{arc cos } (-3/4)$

D) $\text{arc cos } (3/4)$

E) $\text{arc cos } (2/5)$

RESOLUCIÓN 02

Si los diedros de un ángulo triedro miden 127, 127 y 90, entonces la medida de una de las caras congruentes es



Utilizaremos el triedro suplementario
Las caras del suplementario miden:
53, 53 y 90

$\overrightarrow{OH}$: bisectriz del ángulo BOC

Teorema de las 3 perpendiculares

$$m\angle PTB = 90$$

Debemos obtener el suplemento de

$$w : x = 180 - w$$

$\triangle OTP$: 37 y 53

$$OP = 5n, OT = 3n \text{ y } PT = 4n$$

$\triangle OTH$: notable de 45 y 45

$$OT = TH = 3n$$

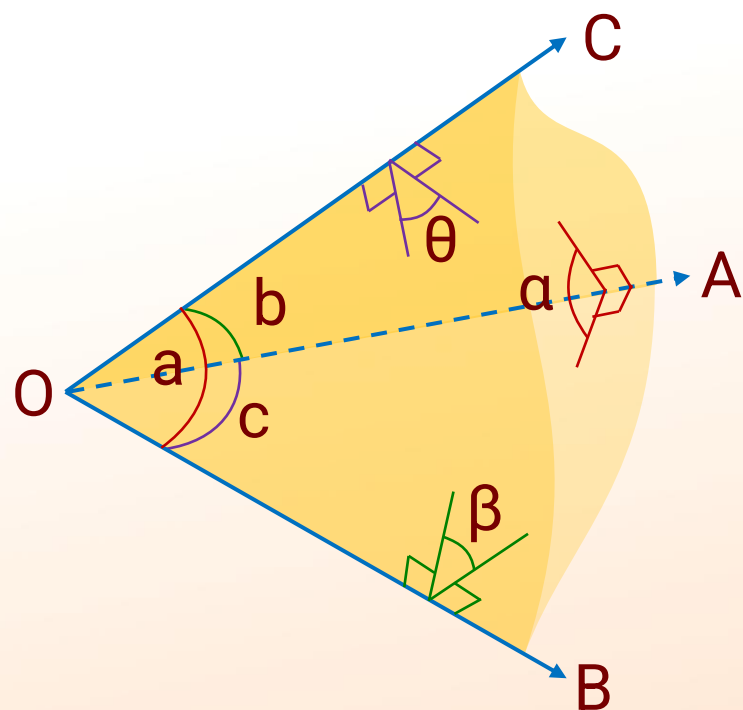
$$\triangle THP : \cos w = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore x = \arccos \left(-\frac{3}{4} \right)$$

Clave: C

TEOREMA

En todo ángulo triedro se cumple que la suma de las medidas de los tres ángulos diedros es mayor que 180 y menor que 540.

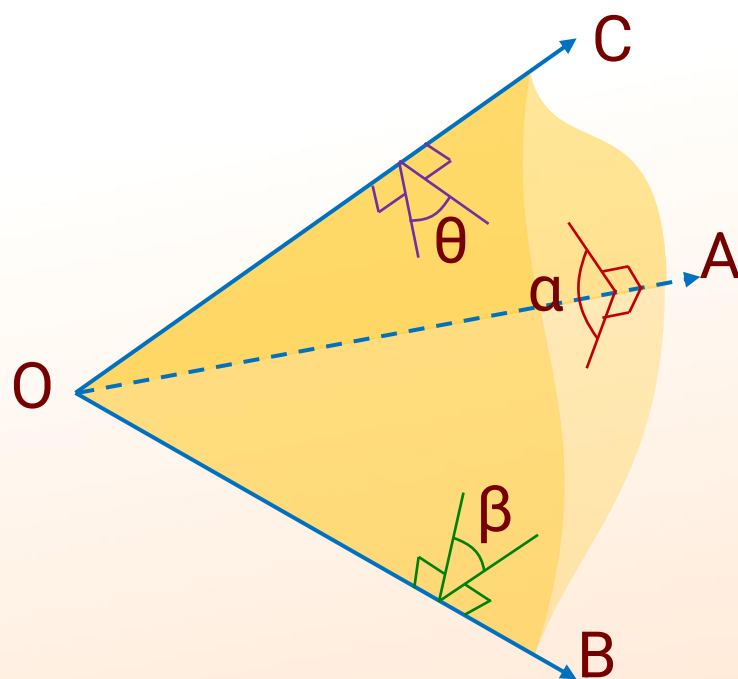


Si α , β y θ son las medidas de los ángulos diedros del ángulo triedro O-ABC, entonces

$$180 < \alpha + \beta + \theta < 540$$

TEOREMA

En todo ángulo triedro se cumple que la suma de las medidas de dos ángulos diedros es menor que 180 más la medida del tercer ángulo diedro.



Si α , β y θ son las medidas de los ángulos diedros del ángulo triedro O-ABC, entonces

$$\alpha + \beta < 180 + \theta$$

$$\alpha + \theta < 180 + \beta$$

$$\beta + \theta < 180 + \alpha$$

DEMOSTRACIÓN:

Considerando a los triedros suplementarios
O-ABC y O'-A'B'C'

$$\begin{aligned} a' + \alpha &= 180 \\ b' + \beta &= 180 \\ c' + \theta &= 180 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a' &= 180 - \alpha \\ b' &= 180 - \beta \\ c' &= 180 - \theta \end{aligned}$$

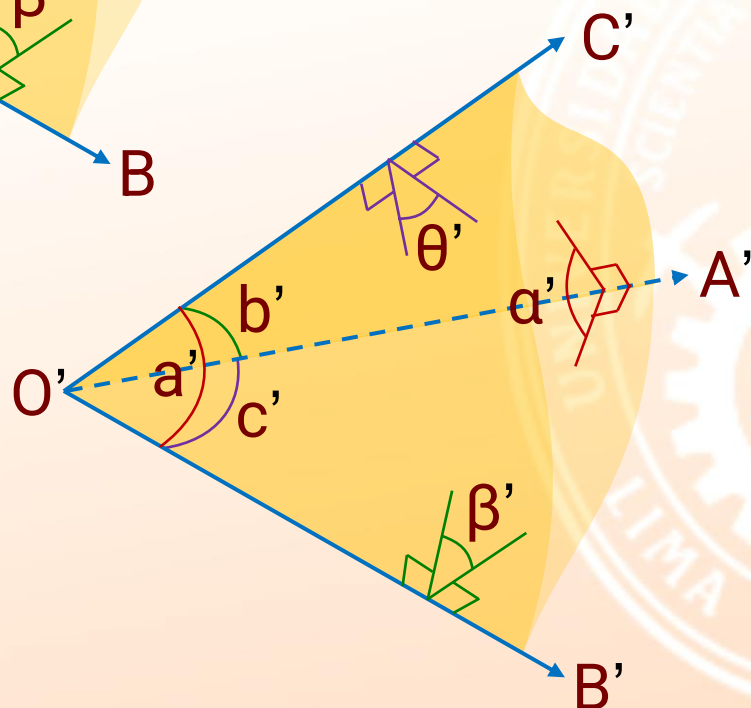
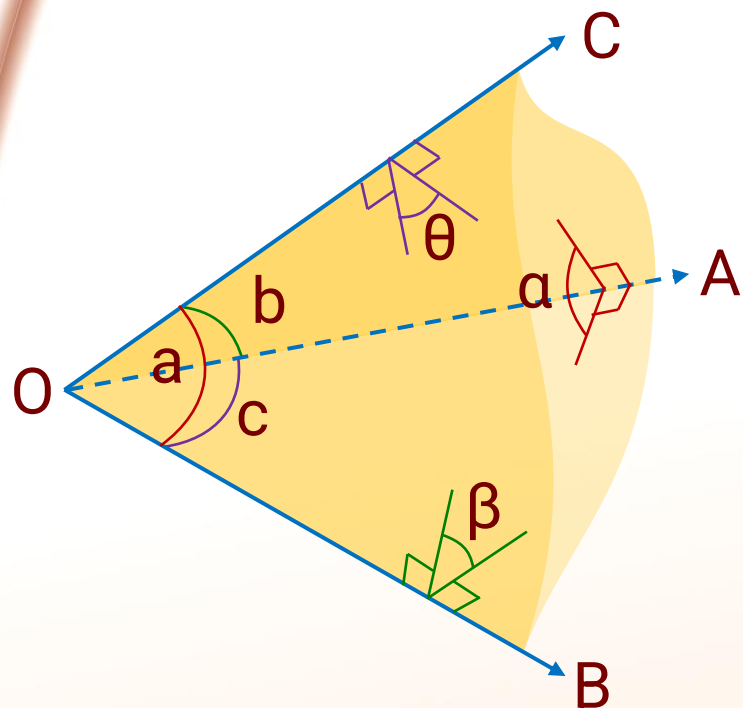
Teorema en el triedro O'-A'B'C'

$$c' < a' + b'$$

Reemplazando:

$$180 - \theta < 180 - \alpha + 180 - \beta$$

$$\therefore \alpha + \beta < 180 + \theta$$



EJERCICO 03

En un ángulo triedro, dos ángulos diedros miden 152 y 134. ¿Cuál es la diferencia entre la mayor y menor medida entera del tercer ángulo diedro?

A) 50

B) 52

C) 54

D) 56

E) 58

RESOLUCIÓN 03

En un ángulo triedro, dos ángulos diedros miden 152 y 134. ¿Cuál es la diferencia entre la mayor y menor medida entera del tercer ángulo diedro

Teorema:

$$152 + 134 < x + 180$$

$$\Rightarrow 106 < x \dots (1)$$

$$152 + x < 134 + 180$$

$$\Rightarrow x < 162 \dots (2)$$

de (1) y (2):

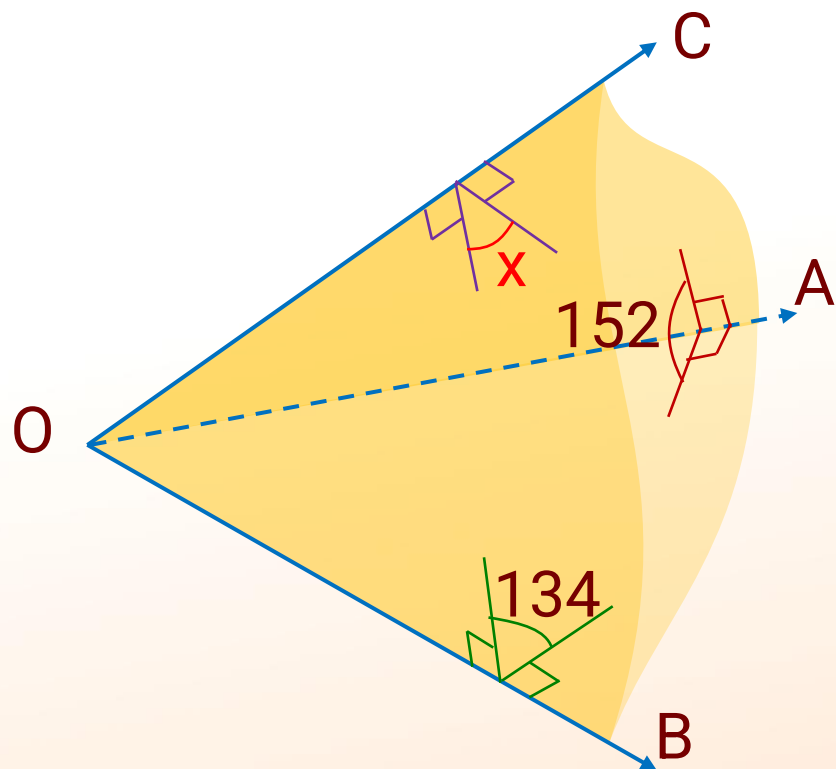
$$106 < x < 162$$

$$X_{\text{menor entero}} = 107$$

$$X_{\text{mayor entero}} = 161$$

$$\text{Diferencia} = 54$$

Clave: C



EJERCICIO 04

En un ángulo triedro, las medidas de sus ángulos diedros son $130 + \alpha$, $85 + 2\alpha$ y 140 . Calcule la diferencia entre el mayor y menor valor entero de α

A) 28

D) 31

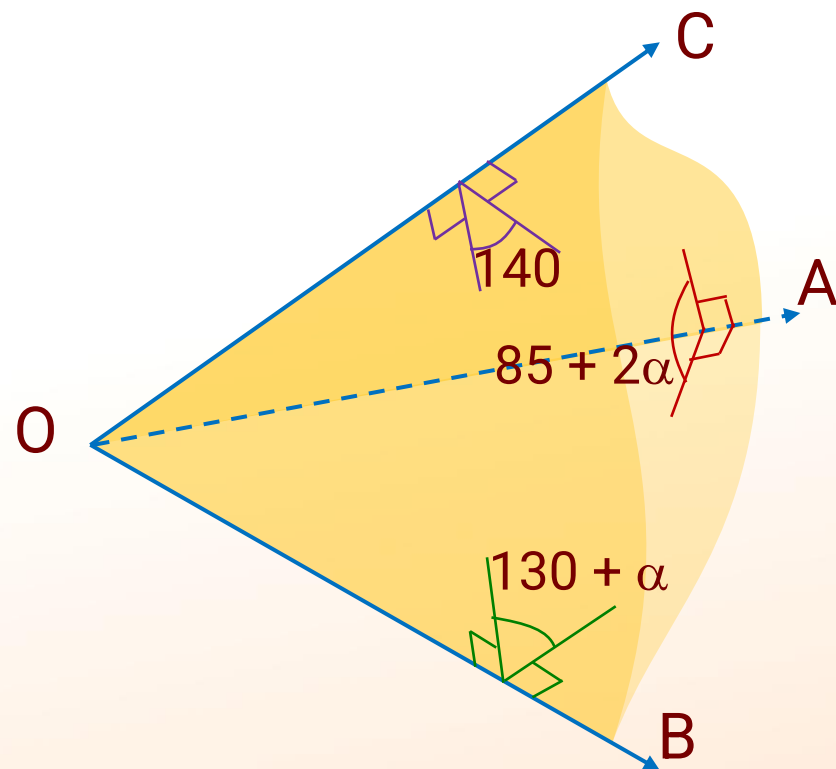
B) 29

E) 32

C) 30

Resolución 04

En un ángulo triedro, las medidas de sus ángulos diedros son $130 + \alpha$, $85 + 2\alpha$ y 140 . Calcule la diferencia entre el mayor y menor valor entero de α



Calcule: $\alpha_{\text{mayor entero}} - \alpha_{\text{menor entero}}$

Teorema

$$130 + \alpha + 85 + 2\alpha < 140 + 180$$

$$3\alpha < 105 \Rightarrow \alpha < 35$$

$$130 + \alpha + 140 < 85 + 2\alpha + 180$$

$$270 + \alpha < 265 + 2\alpha \Rightarrow 5 < \alpha$$

Valores de α : 34, 33, 32, ... 7, 6

$$\alpha_{\text{menor entero}} = 6 \quad \alpha_{\text{mayor entero}} = 34$$

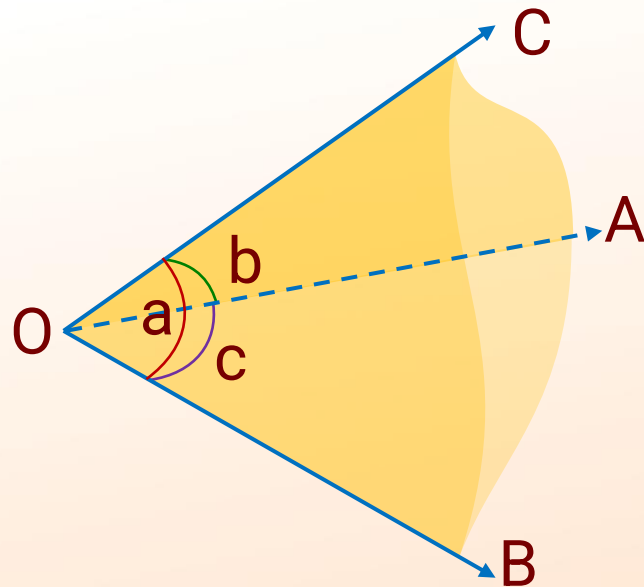
$\therefore$ Diferencia es: 28

Clave: A

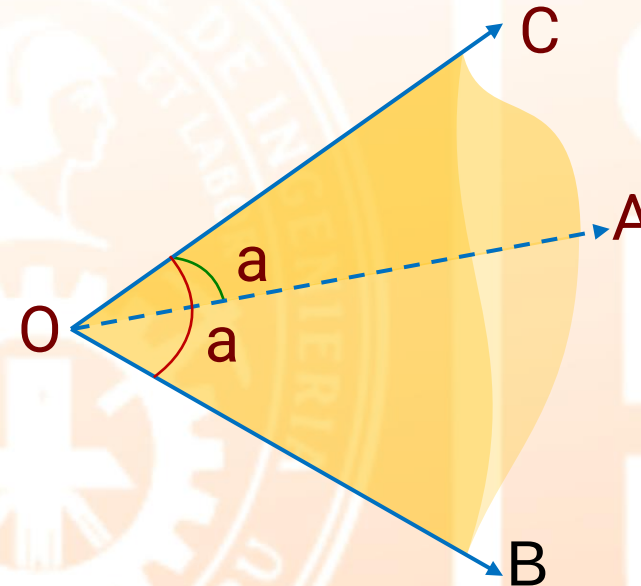
CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS TRIEDROS

Según las caras

1. **Ángulo triedro escaleno:** Cuando sus caras no son congruentes

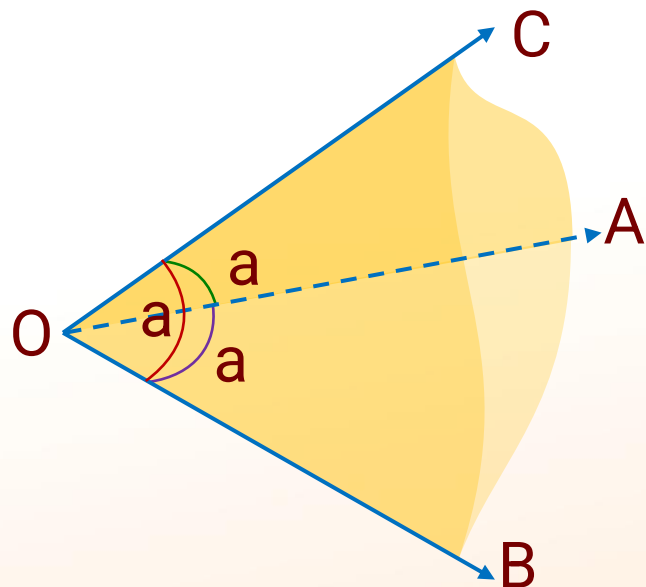


2. **Ángulo triedro isósceles:** Tiene solo dos caras congruentes.



3. Ángulo triedro equilátero:

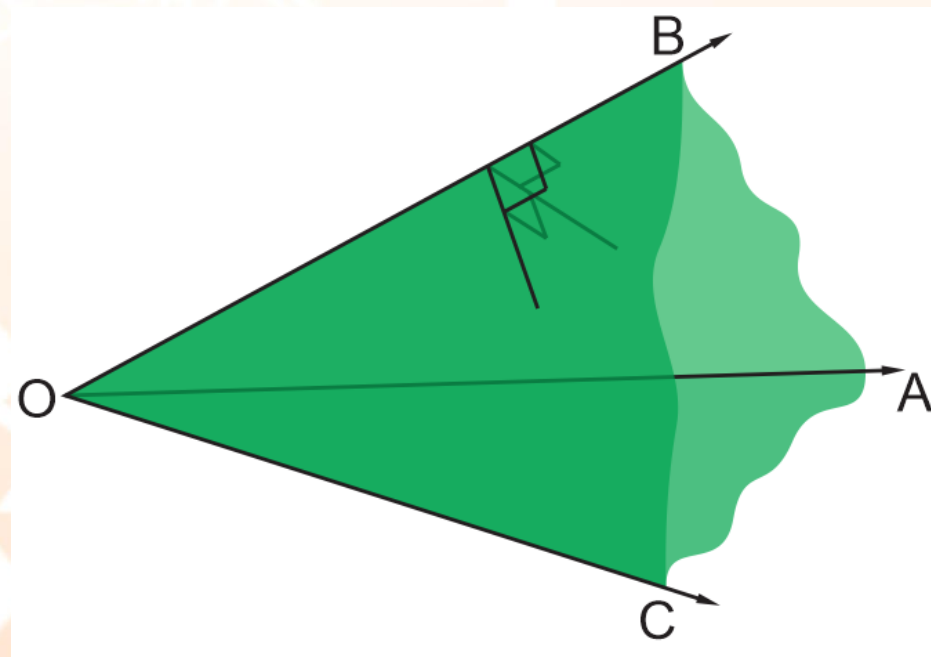
Tiene tres caras congruentes.



Ángulos triedros con ángulos diedros rectos

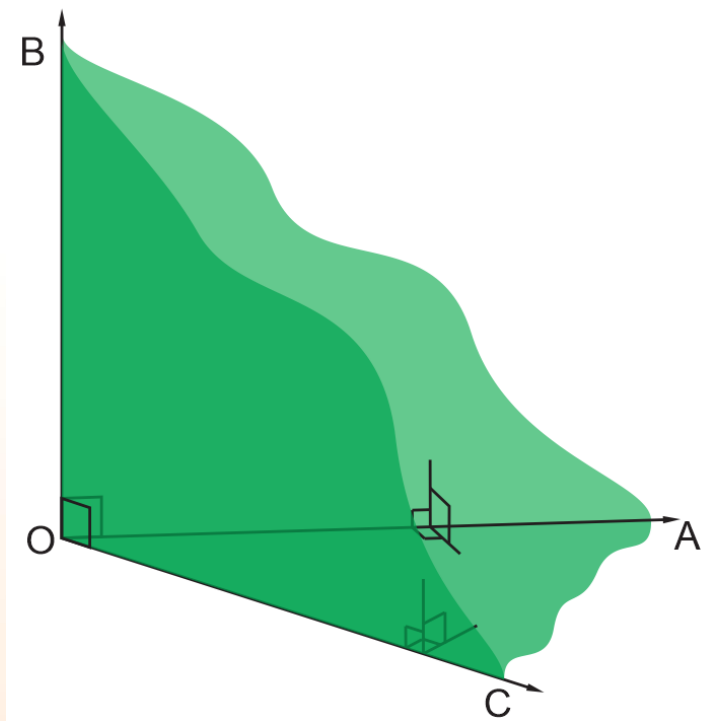
1. Ángulo triedro rectángulo:

Tiene solo un ángulo diedro recto.



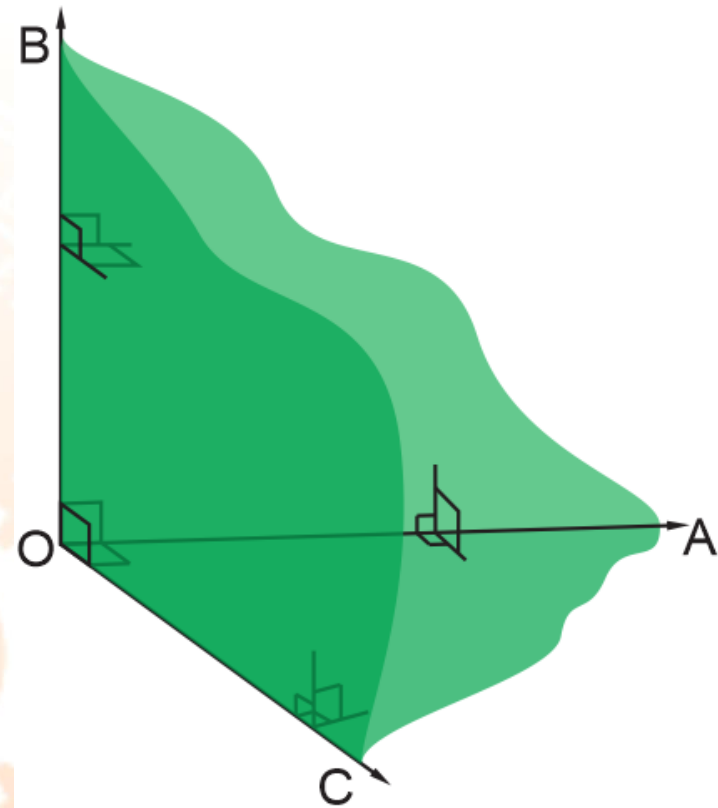
2. Ángulo triedro birrectángulo:

Cuando solo dos ángulos diedros son rectos.



3. Ángulo triedro trirrectángulo:

Tiene tres ángulos diedros rectos.



EJERCICIO 05

En un ángulo triedro O-ABC equilátero, sus caras miden 45 cada una. Calcule la medida de uno de sus ángulos diedros.

- A) $\cos^{-1}(\sqrt{2} - 1)$ B) $\cos^{-1}(2 - \sqrt{2})$ C) $\cos^{-1}(\sqrt{2} / 2)$
D) $\cos^{-1}(\sqrt{2} / 4)$ E) $\cos^{-1}(\sqrt{2} - 1) / 2$

ΔOQP : notable de 45

$$OQ = QP = n \quad y \quad OP = OR = n\sqrt{2}$$

Δ POR: Ley de cosenos

$$(y)^2 = (n\sqrt{2})^2 + (n\sqrt{2})^2 - 2(n\sqrt{2})(n\sqrt{2})\cos 45$$

ΔPQR : Ley de cosenos

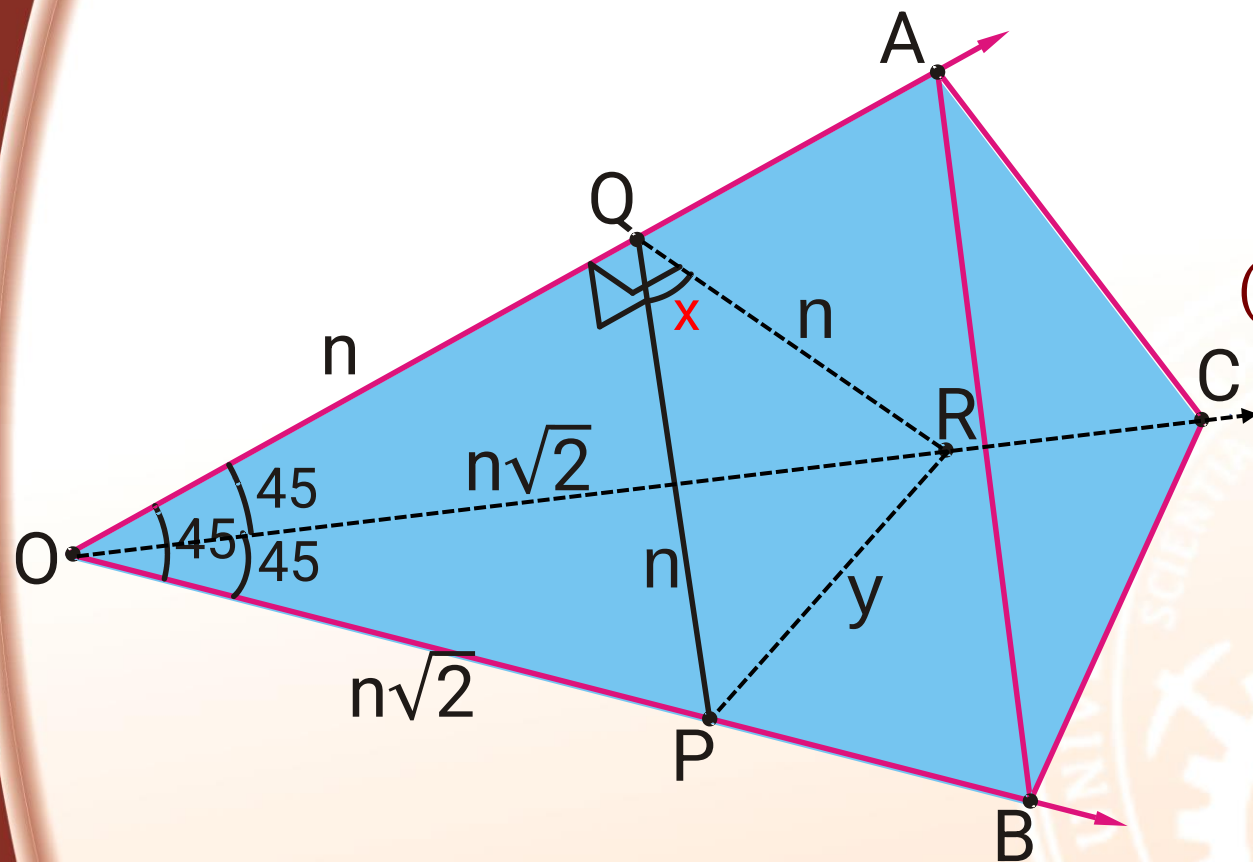
$$(y)^2 = (n)^2 + (n)^2 - 2(n)(n)\cos x$$

Igualandando y^2 :

$$\cos x = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore x = \cos^{-1}(\sqrt{2} - 1)$$

Clave: A



EJERCICIO 06

En un ángulo triedro isósceles las miden 45, 45 y 60. Calcule la medida del ángulo diedro mayor.

A) 105

B) 90

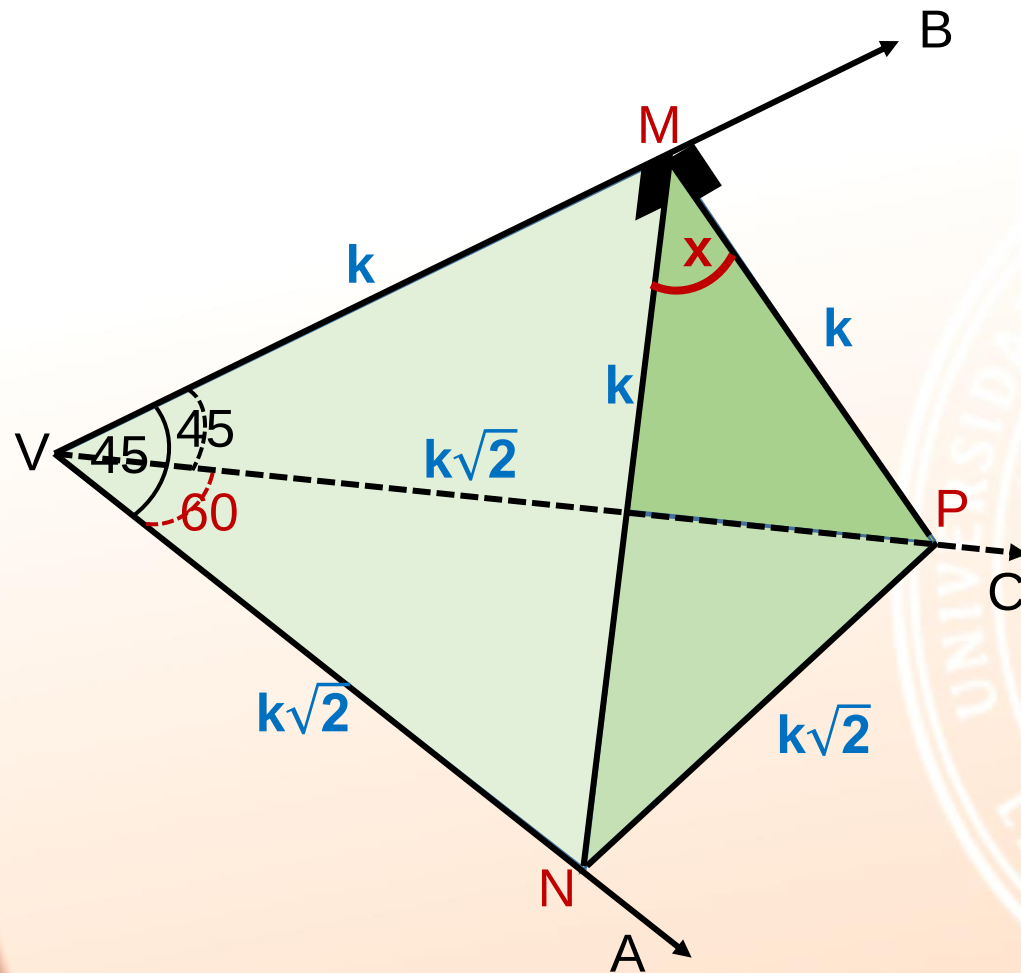
C) 120

D) 150

E) 135

RESOLUCIÓN 06

En un ángulo triedro isósceles las miden 45, 45 y 60. Calcule la medida del ángulo diedro mayor.



A mayor cara se opone mayor diedro

$\triangle VMN$ por $\angle 45$: $VN = k\sqrt{2}$

$\triangle VMP$ por $\angle 45$: $VP = k\sqrt{2}$

$\triangle VNP$ por equilátero: $NP = k\sqrt{2}$

Luego el $\triangle NMP$ es $\triangle$ rectángulo de $\angle 45$:

$$X = 90$$

Clave: B

EJERCICIO 07

En un triedro trirrectángulo $P-ABC$, se trazan las bisectrices de los ángulos APB , APC y BPC , determinándose el ángulo triedro $P-A'B'C'$. Calcule la suma de las medidas de las caras.

A) 120
D) 190

B) 160
E) 200

C) 180

RESOLUCIÓN 07

En un triedro trirrectángulo P-ABC, se trazan las bisectrices de los ángulos APB, APC y BPC, determinándose el ángulo triedro P-A'B'C'. Calcule la suma de las medidas de las caras.

Sean α , β y θ las medidas de las caras del ángulo triedro P-A'B'C'. Calcule $\alpha + \beta + \theta$

Cálculo de θ

Teorema de las tres perpendiculares

$\triangle PDH$ es notable de 45

$\triangle PHQ$ es notable de 45

$\triangle PDQ$ es notable de 30 y 60: $\theta = 60$

Análogamente: $\alpha = 60$ y $\beta = 60$

$$\therefore \alpha + \beta + \theta = 60 + 60 + 60 = 180$$

Clave: C

